

# Capítulo 4

## ➤ 5. Heterocedasticidade

- 5.1. Motivação e consequências
- 5.2. Estimação consistente da matriz de covariâncias
- 5.3. Testes para detecção de heterocedasticidade
- 5.4. Exemplo com aplicação empírica

# 5.1. Motivação e consequências

## ► Motivação

### ► Hipótese DS.5: Homocedasticidade

$$\text{Var}(u_i | x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{ik}) = \sigma^2$$

O valor das variáveis explicativas **não pode** conter qualquer informação sobre a variância do erro

A variância do erro **não pode** depender do valor das variáveis explicativas

- Com dados seccionais esta hipótese dificilmente se verifica o mais comum é a própria variância do erro (ou da variável dependente) ser função das variáveis explicativas.

### Exemplo:

$$\text{cerveja} = \beta_0 + \beta_1 \text{rendimento} + u$$

$$\text{Var}(\text{cerveja} | \text{rendimento}) = \text{Var}(u | \text{rendimento}) = h(\text{rendimento}) \neq \sigma^2$$

### ► Definição:

$$\text{Var}(u_i | x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{ik}) = h(x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{ik}) = \sigma_i^2 \neq \sigma^2$$

A variância do erro **não é constante!**

A variância do erro e depende do valor das variáveis explicativas

# 5.1. Motivação e consequências

## ► Consequências na estimação OLS

► A heterocedasticidade não põe em causa as hipóteses DS.1 a DS.4, como tal, desde que estas se verifiquem então,

► O estimador OLS para  $\beta_j$   $j = 0, 1, \dots, k$

► É centrado

► Não é eficiente

► O estimador OLS para  $Var(\hat{\beta}_j | x_1, \dots, x_k)$   $j = 0, 1, \dots, k$

► É inconsistente!



**toda a inferência habitual (I.C., testes  $t$  e  $F$ ) é inválida**

► O estimador  $\hat{\sigma}^2$  não é válido (não faz sentido)

► O  $R^2$  mantém a interpretação habitual

## 5.2. Estimação consistente da matriz de covariâncias

### ► Erros padrão de White (robustos à heterocedasticidade)

$$se^* \left( \hat{\beta}_j \right) = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^n \hat{r}_{ij}^2 \hat{u}_i^2}}{SSR_j}$$

- $\hat{r}_{ij}$  é o resíduo da observação  $i$  na regressão de  $x_j$  sobre todas as outras variáveis do modelo
- $\hat{u}_i$  é o resíduo da observação  $i$  na regressão original
- $SSR_j$  é a soma dos quadrados dos resíduos da regressão original
- O erro padrão de White é consistente para heterocedasticidade de forma desconhecida
- A inferência com  $se^* \left( \hat{\beta}_j \right)$  é válida assintoticamente
- O cálculo da estatística  $F$  baseado na expressão com a soma dos quadrados dos resíduos ou com os  $R^2$  não é válida (mesmo com erros padrão de White)

## 5.2. Estimação consistente da matriz de covariâncias

### Exemplo

Dependent Variable: LOG(WAGE)  
Method: Least Squares  
Included observations: 526

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	0.390483	0.102210	3.820413	0.0001
FEMALE	-0.337187	0.036321	-9.283424	0.0000
EDUC	0.084136	0.006957	12.09407	0.0000
EXPER	0.038910	0.004824	8.066683	0.0000
EXPER^2	-0.000686	0.000107	-6.388842	0.0000

R-squared	0.399590	Mean dependent var	1.623268
Adjusted R-squared	0.394981	S.D. dependent var	0.531538
S.E. of regression	0.413446	Akaike info criterion	1.080882
Sum squared resid	89.05862	Schwarz criterion	1.121427
Log likelihood	-279.2720	Hannan-Quinn criter.	1.096757
F-statistic	86.68521	Durbin-Watson stat	1.775544
Prob(F-statistic)	0.000000		

Dependent Variable: LOG(WAGE)  
Method: Least Squares  
Included observations: 526

### White heteroskedasticity-consistent standard errors & covariance

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	0.390483	0.108598	3.595658	0.0004
FEMALE	-0.337187	0.036184	-9.318715	0.0000
EDUC	0.084136	0.007690	10.94104	0.0000
EXPER	0.038910	0.004675	8.322568	0.0000
EXPER^2	-0.000686	0.000100	-6.828754	0.0000

R-squared	0.399590	Mean dependent var	1.623268
Adjusted R-squared	0.394981	S.D. dependent var	0.531538
S.E. of regression	0.413446	Akaike info criterion	1.080882
Sum squared resid	89.05862	Schwarz criterion	1.121427
Log likelihood	-279.2720	Hannan-Quinn criter.	1.096757
F-statistic	86.68521	Durbin-Watson stat	1.775544
Prob(F-statistic)	0.000000	Wald F-statistic	81.96798
Prob(Wald F-statistic)	0.000000		

## 5.3. Testes para detecção de heterocedasticidade

### ► Motivação

$$\text{Var}(u \mid x_1, \dots, x_k) = E(u^2 \mid x_1, \dots, x_k) = h(x_1, x_2, \dots, x_k)$$



$$E(u^2 \mid x_1, \dots, x_k) = \delta_0 + \delta_1 x_1 + \delta_2 x_2 + \dots + \delta_k x_k$$



$$u^2 = \delta_0 + \delta_1 x_1 + \delta_2 x_2 + \dots + \delta_k x_k + \varepsilon$$

### ► Teste de Breusch-Pagan

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \dots + \beta_k x_k + u$$

### ► Objetivo:

$$H_0 : \text{Var}(u \mid x_1, \dots, x_k) = \sigma^2 \quad H_1 : \text{Var}(u \mid x_1, \dots, x_k) = \delta_0 + \delta_1 x_1 + \delta_2 x_2 + \dots + \delta_k x_k$$

## 5.3. Testes para detecção de heterocedasticidade

### ► Procedimento de teste

1. Estimação OLS do modelo original  $\longrightarrow \hat{u} = y - \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_1 + \dots + \hat{\beta}_k x_k$

2. Regressão auxiliar de teste:

$$\text{OLS de } \hat{u}^2 = \delta_0 + \delta_1 x_1 + \delta_2 x_2 + \dots + \delta_k x_k + v$$

3. Testar

$$H_0 : \delta_1 = \delta_2 = \dots = \delta_k = 0 \quad H_1 : H_0 \text{ falsa}$$

Teste  $F$  de significância global da regressão auxiliar de teste

4. Conclusão

Rejeitar  $H_0 \longrightarrow$  evidência de heterocedasticidade no erro do modelo inicial

Não rejeitar  $H_0 \longrightarrow$  não há evidência de heterocedasticidade.

## 5.3. Testes para detecção de heterocedasticidade

### Exemplo

Test Equation:

Dependent Variable: RESID^2

Method: Least Squares

Included observations: 526

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	0.037480	0.068360	0.548268	0.5837
FEMALE	-0.013118	0.024292	-0.540000	0.5894
EDUC	0.005509	0.004653	1.183964	0.2370
EXPER	0.008761	0.003226	2.715742	0.0068
EXPER^2	-0.000169	7.18E-05	-2.358137	0.0187
R-squared	0.018981	Mean dependent var	0.169313	
Adjusted R-squared	0.011449	S.D. dependent var	0.278118	
S.E. of regression	0.276521	Akaike info criterion	0.276402	
Sum squared resid	39.83772	Schwarz criterion	0.316946	
Log likelihood	-67.69362	Hannan-Quinn criter.	0.292277	
F-statistic	2.520076	Durbin-Watson stat	1.967219	
Prob(F-statistic)	0.040375			

$\hat{u}^2$

Com  $\hat{u}$  o resíduo da regressão para log(wage)

Estatística de teste

Evidência de heterocedasticidade



## 5.3. Testes para detecção de heterocedasticidade

### ► Teste de White

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + u$$

### ► Teste de hipóteses

$$H_0 : \text{Var}(u | x_1, x_2, x_3) = \sigma^2 \quad H_1 : \text{Var}(u | x_1, x_2, x_3) = h(x_1, x_2, x_3)$$

### ► Procedimento de teste

1. Estimação OLS do modelo original  $\longrightarrow \hat{u} = y - \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_1 + \hat{\beta}_2 x_2 + \hat{\beta}_3 x_3$

2. Regressão auxiliar de teste: OLS de

$$\hat{u}^2 = \delta_0 + \delta_1 x_1 + \delta_2 x_2 + \delta_3 x_3 + \delta_4 x_1^2 + \delta_5 x_2^2 + \delta_6 x_3^2 + \delta_7 x_1 x_2 + \delta_8 x_1 x_3 + \delta_9 x_2 x_3 + v$$

3. Testar

$$H_0 : \delta_1 = \delta_2 = \dots = \delta_9 = 0 \quad H_1 : H_0 \text{ falsa}$$

Teste F de significância global da regressão auxiliar de teste

4. Conclusão

Rejeitar  $H_0 \longrightarrow$  evidência de heterocedasticidade no erro do modelo inicial

## 5.3. Testes para detecção de heterocedasticidade

### Exemplo

Test Equation:

Dependent Variable: RESID^2

Method: Least Squares

Included observations: 526

$\hat{u}^2$

Com  $\hat{u}$  o resíduo da regressão para log(wage)

#### Collinear test regressors dropped from specification

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	0.558137	0.268879	2.075795	0.0384
FEMALE	-0.125279	0.140393	-0.892343	0.3726
FEMALE*EDUC	0.012647	0.010043	1.259261	0.2085
FEMALE*EXPER	-0.003751	0.006530	-0.574430	0.5659
FEMALE*EXPER^2	4.52E-05	0.000146	0.310811	0.7561
EDUC^2	0.002544	0.001125	2.260940	0.0242
EDUC*EXPER	-2.69E-05	0.001256	-0.021411	0.9829
EDUC*EXPER^2	1.40E-05	2.73E-05	0.511937	0.6089
EDUC	-0.066880	0.033663	-1.986760	0.0475
EXPER^2	0.000813	0.001351	0.601774	0.5476
EXPER*EXPER^2	-2.99E-05	4.44E-05	-0.673824	0.5007
EXPER	-0.005241	0.021205	-0.247149	0.8049
EXPER^2^2	2.50E-07	4.70E-07	0.531774	0.5951
R-squared	0.037890	Mean dependent var	0.169313	
Adjusted R-squared	0.015385	S.D. dependent var	0.278118	
S.E. of regression	0.275970	Akaike info criterion	0.287356	
Sum squared resid	39.06984	Schwarz criterion	0.392772	
Log likelihood	-62.57470	Hannan-Quinn criter.	0.328631	
F-statistic	1.683600	Durbin-Watson stat	1.970279	
Prob(F-statistic)	0.066942			

Estatística de teste

não há evidência de heterocedasticidade a 5%

## 5.3. Testes para detecção de heterocedasticidade

### ► Teste simplificado de White

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \dots + \beta_k x_k + u$$

### ► Teste de hipóteses

$$H_0 : \text{Var}(u | x_1, \dots, x_k) = \sigma^2 \quad H_1 : \text{Var}(u | x_1, \dots, x_k) = h(x_1, x_2, \dots, x_k)$$

### ► Procedimento de teste

1. Estimação OLS do modelo original  $\longrightarrow \hat{u}, \hat{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_1 + \dots + \hat{\beta}_k x_k$

2. Regressão auxiliar de teste: OLS de

$$\hat{u}^2 = \delta_0 + \delta_1 \hat{y} + \delta_2 \hat{y}^2 + v$$

3. Testar

$$H_0 : \delta_1 = \delta_2 = 0 \quad H_1 : H_0 \text{ falsa}$$

Teste F de significância global da regressão auxiliar de teste

4. Conclusão

Rejeitar  $H_0 \longrightarrow$  evidência de heterocedasticidade no erro do modelo inicial

## 5.3. Testes para detecção de heterocedasticidade

### Exemplo

$\hat{u}^2$  Com  $\hat{u}$  o resíduo da regressão para  $\log(\text{wage})$

Dependent Variable: RESID^2  
Method: Least Squares  
Included observations: 526

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
$\hat{y}$ → C	0.233483	0.209660	1.113627	0.2660
$\hat{y}$ → FIT	-0.187119	0.263787	-0.709356	0.4784
$\hat{y}^2$ → FIT^2	0.087191	0.081226	1.073446	0.2836
R-squared	0.014904	Mean dependent var	0.169313	
Adjusted R-squared	0.011137	S.D. dependent var	0.278118	
S.E. of regression	0.276565	Akaike info criterion	0.272944	
Sum squared resid	40.00326	Schwarz criterion	0.297271	
Log likelihood	-68.78420	Hannan-Quinn criter.	0.282469	
F-statistic	3.956441	Durbin-Watson stat	1.943744	
Prob(F-statistic)	0.019706			

Estatística de teste

Evidência de heterocedasticidade